BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité – Coefficient 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice n°1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $f(x) = x(1 - \ln x)^2$.

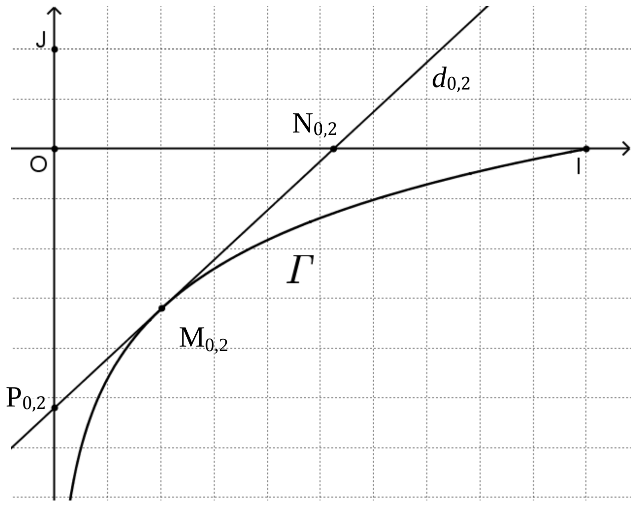
a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $g(x) = \ln x$. Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a, et l'axe des ordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.



a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$ en unités d'aire.

b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;1]$, l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ en unités d'aire est donnée par $A(a) = \frac{1}{2}a\left(1 - \ln a\right)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $A(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice n°2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M$'$ d'affixe z' tel que $z' = \frac{-1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + \mathrm{i}$ et $z_B = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

- **a.** Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction f.
- **b.** Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction f.
- **c.** Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

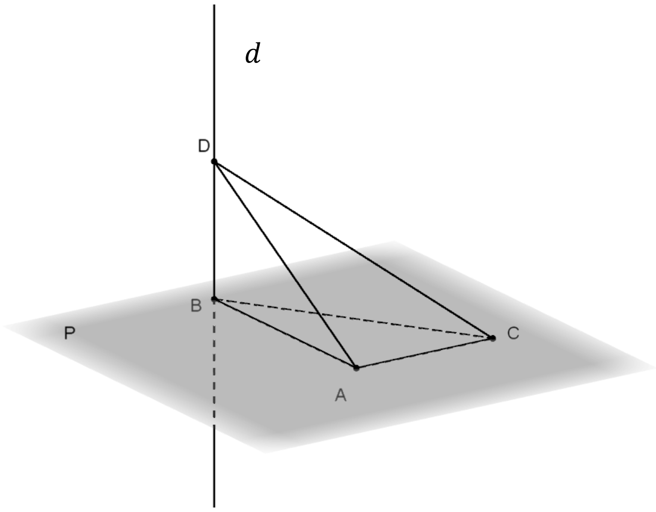
- **a.** Montrer que $z' = \frac{1}{r}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.
- **b.** Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M$'$ par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

- **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
- **b.** Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
- **c.** Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M$'$ du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice n°3 (6 points)
Commun à tous les candidats
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A
Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un *bicoin*.

3. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du *bicoin* ABCD.
   b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du *bicoin* ABCD.

Partie B
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3\,;1\,;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point $B(5\,;5\,;-1)$.
3. Justifier que le point $C(7\,;3\,;-9)$ appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.
   a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.
   b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.
   c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C
On donne le point $D(9\,;\ 1\,;\ 1)$ qui est un des deux points solutions de **la question 4.c. de la partie B**.
Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère. En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice n°4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note $a_n$et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.
b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
c. Calculer PDP.
d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

a. Montrer que tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
b. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

5. **a.** Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
b. Déterminer la limite de la suite (a_n).
c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.