BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

ÉPREUVE DU JEUDI 18 JUIN 2015

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 / 8 à 8 / 8

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n° 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. On considère le nombre complexe $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. La forme algébrique du nombre complexe z est :

- **a.** $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$
- **b.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$
- **c.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$
- **d.** $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

2. $z_1 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3}-\mathrm{i}$. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 \times z_2$ est :

- **a.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
- **b.** $-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
- **c.** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
- **d.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

3. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{3}y = 0$ sont de la forme :

- **a.** $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}t^2$
- **b.** $t \mapsto A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$
- **c.** $t \mapsto A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}$
- **d.** $t \mapsto -\frac{1}{3}$

4. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 2+\dfrac{1}{x+1}$. La limite de cette fonction f en $+\infty$ est égale à :

- **a.** $-\infty$
- **b.** $+\infty$
- **c.** 0
- **d.** 2

EXERCICE n° 2 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.
La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.
On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.
Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E, P_S et L est donnée par : $P_S = P_E \times \mathrm{e}^{-aL}$ où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.
Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;

- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;

- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a = 0,046$. Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.

2. **a.** Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 7\mathrm{e}^{-0,035x}$.

b. En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.

3. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Déteminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. **a.** Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

b. Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

EXERCICE nº 3 (6 points)

Le parc de véhicules particuliers (VP) et de véhicules utilitaires légers (VUL) circulant en France est essentiellement constitué de véhicules thermiques (principalement essence, gasoil et GPL).
Pour lutter contre la pollution, il intègre de plus en plus de véhicules à « faible émission de CO_2 » c'est à dire des véhicules hybrides (véhicules thermiques assistés d'un moteur électrique) et des véhicules électriques.

Document 1

Au regard du parc et des ventes de véhicules en 2010, l'ADEME (Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) a mobilisé ses services techniques et économiques en 2012, afin d'élaborer des visions énergétiques. Afin de répondre aux enjeux environnementaux, l'ADEME prévoit d'atteindre pour le parc 2030 un taux moyen d'émission de CO_2 par véhicule de 100 g/km.

Ventes et prévisions

Véhicules (VP-VUL)	**Ventes 2010**	**Parc 2010**	**Prévisions ventes 2030**	**Prévisions parc 2030**
Véhicules thermiques	100 %	100 %	64 %	89 %
Véhicules hybrides	0 %	0 %	24 %	7 %
Véhicules électriques	0 %	0 %	12 %	4 %
Total des voitures VP et VUL	2,2 millions	35 millions	2 millions	35 millions
Emission moyenne de CO_2 par véhicule	127 g/km	165 g/km	49 g/km	100 g/km

Document 2

Ventes nationales de véhicules entre 2011 et 2013

Véhicules (VP-VUL)	**Ventes 2011**	**Ventes 2012**	**Ventes 2013**
Véhicules hybrides	13 600	27 730	41 340
Véhicules électriques	4313	9314	13 954
Total des ventes y compris véhicules thermiques	2 204 065	1 898 872	1 790 000

Partie A

1. Selon les prévisions de l'ADEME, quel serait en 2030 le nombre de véhicules hybrides vendus ?

2. Selon les prévisions de l'ADEME, quel serait en 2030 le pourcentage de véhicules à faible émission de CO_2 dans le parc automobile ?

Partie B

1. Le tableau suivant est incomplet. Déterminer le pourcentage d'augmentation des ventes de véhicules hybrides de 2012 à 2013.

Vehicules VP et VUL	Augmentation des ventes de véhicules	
	de 2011 à 2012	de 2012 à 2013
Véhicules hybrides	103,9 %	...
Véhicules électriques	116 %	49,8 %

2. Après un fort démarrage des ventes de véhicules hybrides, les professionnels de l'automobile envisagent une augmentation de leurs ventes de 16 % par an de 2013 à 2030. Le nombre de véhicules hybrides vendus en 2013 est de 41 340.
On décide de modéliser les ventes annuelles de véhicules hybrides par une suite géométrique de raison 1,16.
On note u_n le nombre de véhicules hybrides vendus durant l'année $2013 + n$.

   a. Donner u_0.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. L'augmentation de 16 % par an des ventes de véhicules hybrides permettrait-elle d'atteindre la prévision de l'ADEME pour l'année 2030 ?

3. Les professionnels de l'automobile s'intéressent aussi aux ventes de véhicules électriques de 2013 à 2030.
Le nombre de véhicules électriques vendus en 2013 est de 13 954.

   a. On réalise sur tableur une feuille de calcul qui détermine le nombre de véhicules électriques vendus de 2013 à 2030 en supposant une augmentation annuelle de 16 % à partir de 2013.

	A	B
1	Année	Prévisions des ventes de voitures électriques
2	2013	13954
3	2014	16186,64
4	2015	18776,5024
5	2016	21780,74278
6	2017	25265,66163
7	2018	29308,16749
8	2019	33997,47429
9	2020	39437,07017
10	2021	45747,0014
11	2022	53066,52163
12	2023	61557,16509
13	2024	71406,3115
14	2025	82831,32134
15	2026	96084,33276
16	2027	111457,826
17	2028	129291,0782
18	2029	149977,6507
19	2030	173974,0748

Donner la formule saisie dans la cellule B3 de la feuille de calcul ci-dessus pour compléter le tableau par « recopie vers le bas ».

b. Ce taux d'augmentation annuel permettrait-il d'atteindre les prévisions de l'ADEME des ventes de véhicules électriques en 2030 ?

4. Les professionnels de l'automobile cherchent un pourcentage d'augmentation annuelle des ventes de véhicules électriques qui permettrait d'atteindre les prévisions de l'ADEME en 2030.
On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
   u : un nombre réel
   q : un nombre réel
Initialisation
   Affecter à u la valeur 173 974
   Affecter à q la valeur 1,16
Traitement
   Tant que u ⩽ 240 000
      q prend la valeur q + 0,01
      u prend la valeur 13 954 × q^17
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher (q − 1) × 100
```

a. Que représente la valeur 173 974 prise par la variable u dans l'initialisation de l'algorithme ?

b. Faire fonctionner cet algorithme. Pour cela reproduire et compléter le tableau ci-dessous. Des lignes supplémentaires pourront être ajoutées.

Etapes de l'algorithme	Variables	
	q	u
Initialisation	$1,16$	173 974
Etape 1	...	...
Etape 2	...	...
...	...	...

c. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme ? Interpréter le résultat.

EXERCICE n° 4 (5 points)

Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*
L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique $1,5$ litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de $1,55$ litre.
A l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,015$.

1. **a.** L'une des trois figures donne la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale. Indiquer sur la copie le numéro de la figure correspondante en expliquant votre choix.

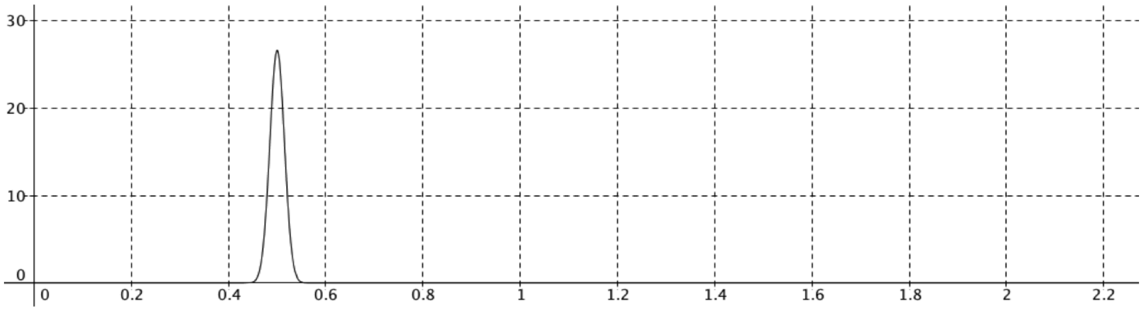

Figure 1

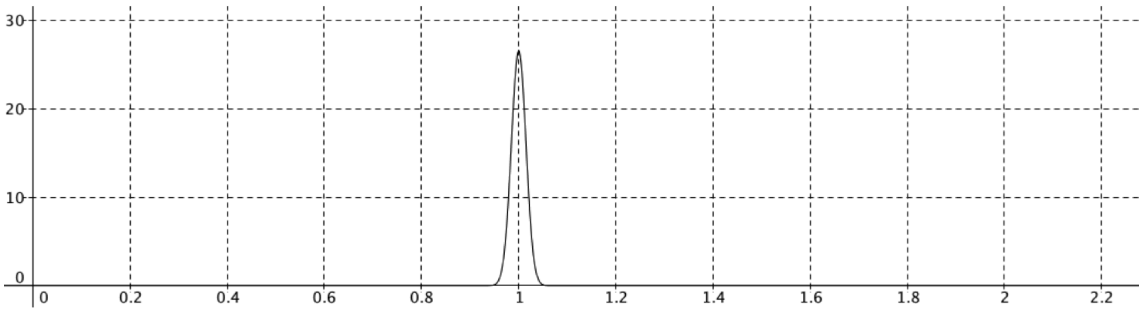

Figure 2

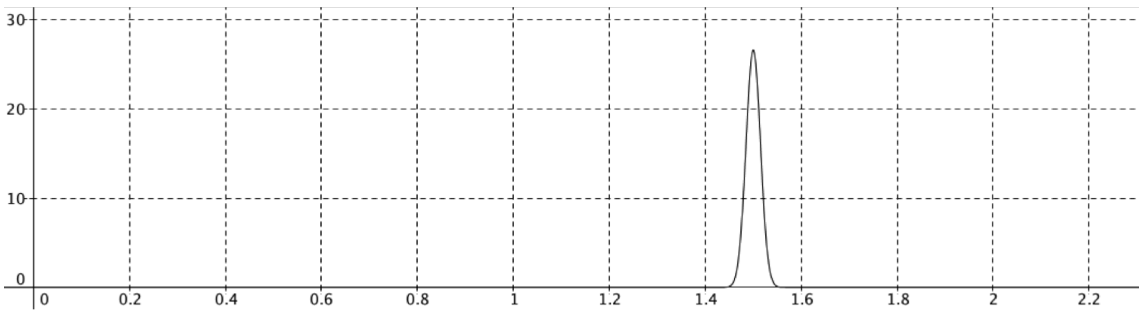

Figure 3

b. Déterminer $P(1,485 \leqslant X \leqslant 1,515)$.

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.

   a. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement $1,48$ litre de jus de fruits ?

   b. Calculer la probabilité que cette bouteille contienne entre $1,46$ litre et $1,54$ litre de jus de fruits.

   c. Quelle est la probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage ? On rappelle que toutes les bouteilles utilisées ont un volume de $1,55$ litre.

3. Une bouteille est dite conforme si elle contient entre $1,46$ litre et $1,54$ litre de jus de fruits.
   Selon l'usine OCEFRAIS, la probabilité qu'une bouteille soit non conforme est $0,0077$.
   Un supermarché achète un lot de 10 000 bouteilles.

   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence observée de bouteilles non conformes dans un tel lot.

   b. Dans le lot de 10 000 bouteilles, on a compté 90 bouteilles non conformes. Le gérant du supermarché trouve le nombre de bouteilles non conformes anormalement élevé.
   L'usine OCEFRAIS a-t-elle des raisons de s'inquiéter ?