BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2015

Jeudi 18 juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

L'annexe 1 page 7/7 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (7 points)

Les trois parties sont indépendantes. Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}, à l'exception de la question 2. de la partie C.

Des dentistes d'une région se sont constitués en association de façon à confronter leurs expériences.

Partie A

Les dentistes de cette association ont constaté que 37 % de leurs patients ont un problème de carie dentaire. On considère un échantillon de 150 personnes prises au hasard parmi les patients de ces dentistes, suffisamment nombreux pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes de cet échantillon ayant un problème de carie dentaire.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a) A : « Exactement 50 personnes parmi les 150 ont un problème de carie dentaire. »
   b) B : « Au moins 60 personnes parmi les 150 ont un problème de carie dentaire. »

Partie B

Une société qui fabrique un dentifrice souhaite augmenter sa part de marché. Elle envisage pour cela de modifier le goût de son dentifrice.

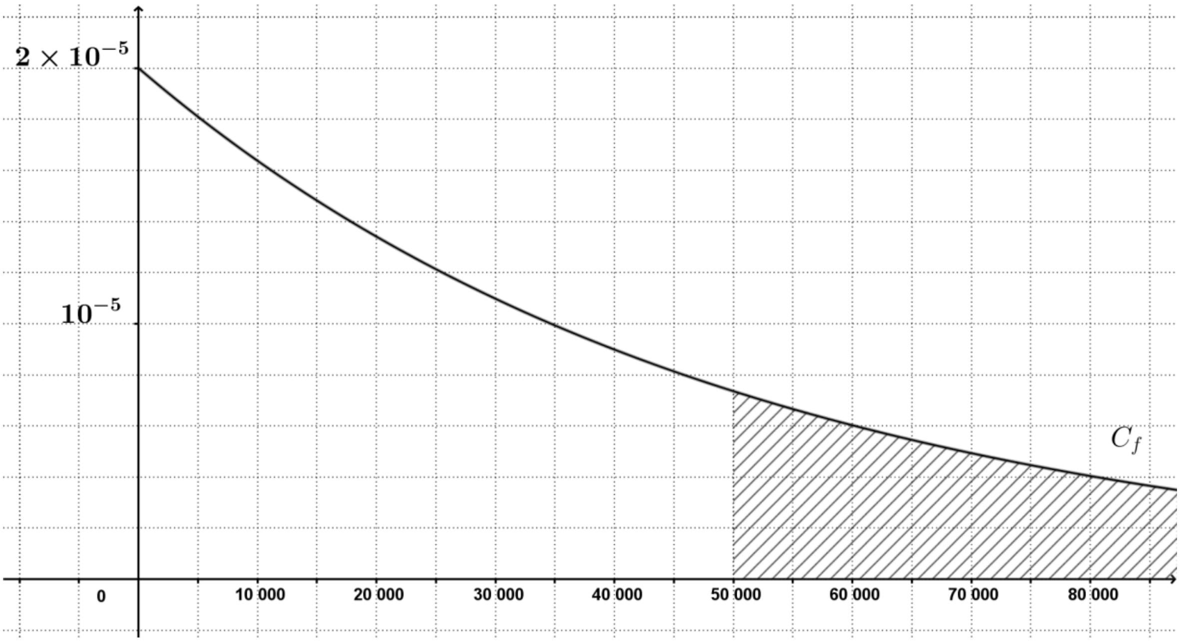
1. Avant de modifier le goût, elle a demandé aux dentistes adhérents de l'association d'interroger leurs patients. Parmi les patients de ces dentistes qui utilisent ce dentifrice, 200 personnes ont été choisies au hasard et 45 % d'entre elles ont déclaré apprécier le goût du dentifrice. On note p la proportion de personnes appréciant le goût du dentifrice parmi les patients qui utilisent ce dentifrice avant la modification.
   Déterminer l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Le goût a été modifié et une nouvelle étude est menée auprès de 300 personnes choisies au hasard parmi les patients des dentistes de l'association. Parmi ces 300 personnes, 165 ont apprécié le nouveau goût du dentifrice.
   Au vu des résultats, le chef de projet de la société lance la production de ce nouveau dentifrice. Que penser de la décision du chef de projet ? Justifier la réponse en exploitant un deuxième intervalle de confiance.

Partie C

Un des dentistes de l'association souhaite remplacer son microscope et se renseigne sur un nouveau modèle. Il s'intéresse notamment à la durée de fonctionnement sans défaillance de la lampe de cet appareil. Un de ses confrères lui conseille une marque proposant un modèle dont la durée de fonctionnement sans défaillance (en heures) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.

1. On a représenté la courbe de la fonction de densité f de cette loi exponentielle dans un repère orthogonal (l'aire totale sous la courbe vaut alors une unité d'aire).



Sachant que l'aire du domaine hachuré vaut 0,368 unités d'aire, déterminer la probabilité pour qu'une lampe de ce modèle prise au hasard ait une durée de bon fonctionnement de moins de 50 000 heures.

2. La durée de vie moyenne d'une lampe de ce modèle est de 60 000 heures.
En déduire une valeur approchée de λ à 10^{-6} près.

3. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0{,}00002$.
On rappelle la formule de probabilité : pour tout réel t positif , $P(Y \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}00002\,t}$.

Calculer la probabilité qu'une lampe de ce modèle prise au hasard ait une durée de bon fonctionnement comprise entre 51 000 et 64 500 heures.

Exercice 2 (7 points)

L'objectif de cet exercice est d'identifier l'espèce microbienne présente dans deux populations microbiennes A et B. Pour ce faire, on réalise, à partir de chacune d'elles, une préparation dont on détermine l'absorbance à intervalles de temps réguliers. L'absorbance, mesurant le trouble de la préparation, est proportionnelle à la densité de la population microbienne présente dans la préparation.

Partie A

Voici les résultats obtenus à partir de la population microbienne A durant sa phase de croissance exponentielle :

Temps t_i (en minutes)	30	40	50	60	70	80	90	100
Absorbance y_i (sans unité)	0,072	0,100	0,134	0,199	0,295	0,398	0,599	0,791

1. Reproduire et compléter le tableau suivant (arrondir au centième) :

Temps t_i (en minutes)	30	40	50	60	70	80	90	100
$z_i = \ln(y_i)$								

2. Représenter le nuage de points M_i (t_i , z_i) dans le repère de l'annexe 1.
3. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite D d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-4}.

   b) Tracer la droite D dans le repère de l'annexe 1.

Dans la suite, on admet que la droite D a pour équation : $z = 0,035\,t - 3,705$.

4. Le coefficient directeur de la droite D représente la vitesse spécifique de croissance exponentielle (exprimée par minute) de la population microbienne A.

   a) Donner la vitesse spécifique de croissance exponentielle, exprimée par minute, de la population microbienne A.

   b) Déterminer l'espèce microbienne présente dans la préparation réalisée à partir de la population microbienne A, sachant qu'il s'agit de l'une des trois référencées en annexe 2. Justifier la réponse.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la préparation effectuée à partir de la population microbienne B. La phase de croissance exponentielle démarre au bout de 60 minutes et l'absorbance vaut alors 1,7. Cette phase de croissance exponentielle dure au moins 210 minutes.

On note $f(t)$ l'absorbance de cette deuxième préparation pour tout temps t exprimé en minutes. On admet que la fonction f ainsi définie est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 0,0058\,y$ sur $[60\,,\,270]$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).

   b) On sait que $f(60) = 1,7$. Déterminer une expression de $f(t)$ pour tout t de $[60\,,\,270]$.

Dans la suite, on prend, pour tout réel t de $[60\,,\,270]$, $f(t) = 1,2\mathrm{e}^{0,0058t}$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $[60\,,\,270]$.
3. a) Résoudre l'équation $f(t) = 3,4$ sur $[60\,,\,270]$.

   b) La durée nécessaire au doublement de l'absorbance et évaluée depuis le début de la phase de croissance exponentielle représente le temps de génération de la population microbienne B.

   En déduire l'espèce microbienne présente dans la préparation réalisée à partir de la population microbienne B, sachant qu'il s'agit de l'une des trois référencées en annexe 2. Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (6 points)

Le 1^er^ janvier 2014, le père de Flo a planté des thuyas d'une hauteur de 60 cm. On admet que leur hauteur augmente de 12 % chaque année.

Partie A

Flo voudrait savoir en quelle année la haie de thuyas atteindra sa hauteur sachant qu'elle-même mesure 1,70 m et ne grandit plus. Pour cela, on emploie deux méthodes différentes.

1) *En utilisant un algorithme*

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :
n entier naturel, *h* réel
Initialisations :
Affecter à *n* la valeur 0
Affecter à *h* la valeur 60
Traitement :
Tant que $h < 170$
    Affecter à *n* la valeur $n + 1$
    Affecter à *h* la valeur $1{,}12 \times h$.
Fin Tant que
Sortie
Afficher *n*

a) Indiquer, dans un tableau, les valeurs successives prises par les variables *n* et *h* lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt (les résultats seront arrondis à 10^{-1}) :

Valeur de *n*	0	1	2	…
Valeur de *h*	60			…

b) Quelle valeur cet algorithme affichera-t-il ? Interpréter concrètement ce résultat par rapport à la situation étudiée.

2) *Sans utiliser d'algorithme*

Pour tout entier naturel *n*, on note h_n la hauteur en centimètres des thuyas le 1^er^ janvier 2014+*n*.

a) Donner la valeur de h_0. Expliquer pourquoi $h_1 = 67{,}2$.

b) Exprimer h_n en fonction de *n*, pour tout entier naturel *n*.

c) En posant une inéquation, répondre à la question de Flo.

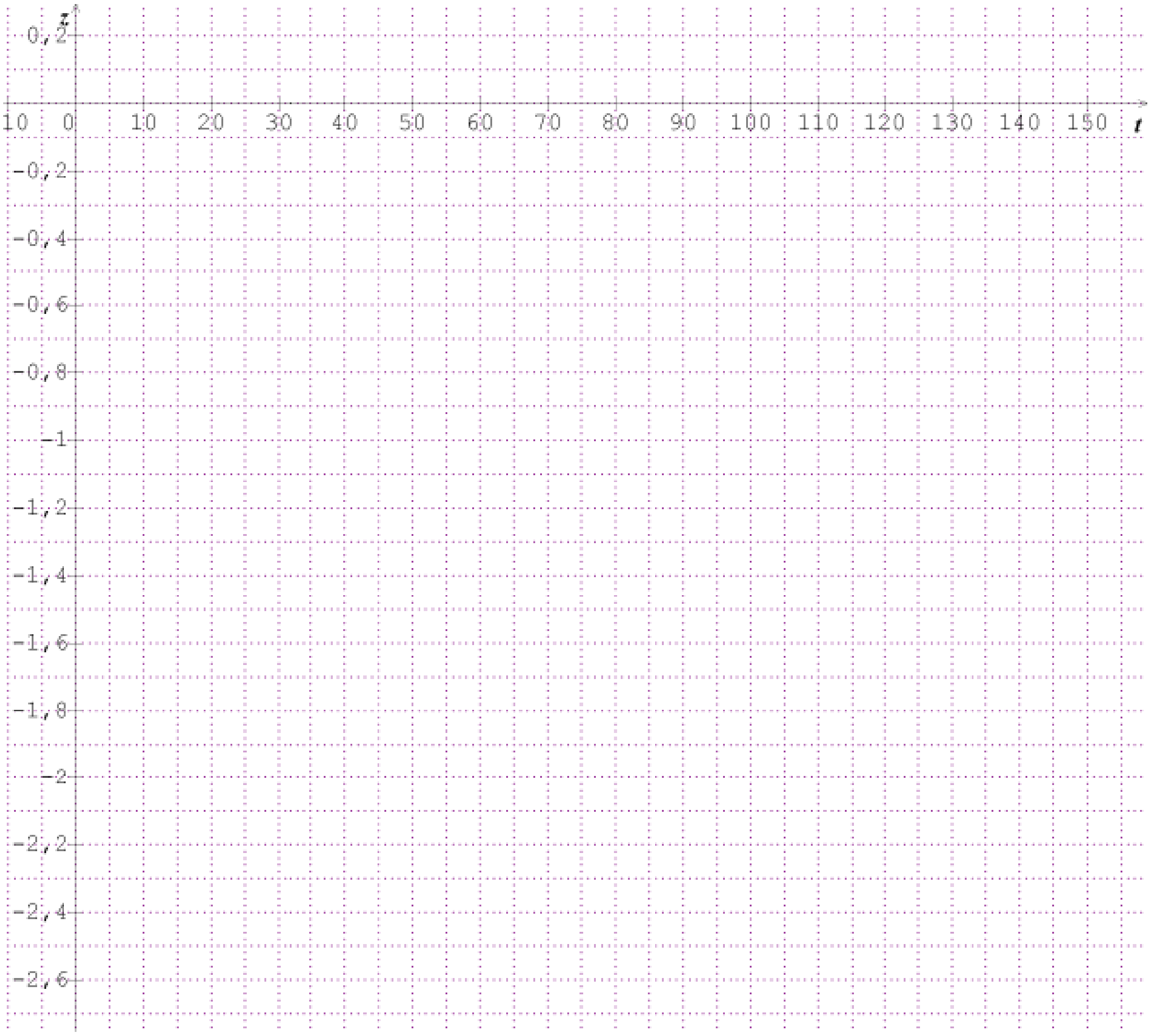
Partie B

Dès que la haie atteint 1,70 m, le père de Flo décide de réduire sa hauteur de 15 cm. Ensuite, chacune des années suivantes, il taillera la haie de 15 cm à la même date. La législation impose que la hauteur de la haie ne dépasse pas 2 m de haut.

Pendant combien d'années encore la hauteur de la haie respectera-t-elle la législation ? Expliquer la démarche utilisée.

ANNEXES

Annexe 1 (exercice 2) : À RENDRE AVEC LA COPIE



Annexe 2 (exercice 2) : vitesse spécifique de croissance exponentielle (par heure) et temps de génération (en heures) de trois espèces microbiennes

Espèce microbienne	**Vitesse spécifique de croissance exponentielle par heure**	**Temps de génération en heures**
Treponema pallidum	0,02	33
S. cerevisae	0,35	2
E. coli	2,10	0,33 (soit environ 20 minutes)