BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2016

Série STD2A

Sciences et Technologies du Design et des Arts Appliqués

MATHEMATIQUES

Jeudi 16 juin 2016

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures

COEFFICIENT **:** 2

Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

L'annexe 1, page 7, n'est pas à rendre avec la copie.
Les 2 annexes en pages 8 et 9 sont à rendre avec la copie.

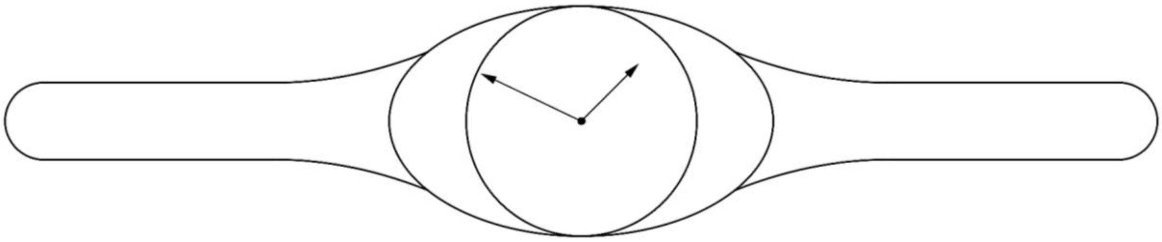
Le candidat doit traiter les 3 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la règlementation en vigueur (circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999).

EXERCICE 1 (8 points)

Un styliste a imaginé la montre-bracelet pour enfants représentée ci-dessous.



La montre et son bracelet ont été dessinés dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ de **l'annexe 1**. Pour la montre, la figure est constituée d'une ellipse ε et d'un cercle Γ. Pour le bracelet, la figure est constituée d'un arc de parabole reliant les points B et C, du segment $[\mathrm{CD}]$, du demi-cercle de diamètre $[\mathrm{DE}]$ et de leurs symétriques par rapport aux axes de coordonnées.
Dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $\mathrm{A}(0\,;3)$, $\mathrm{B}(4\,;1{,}8)$, $\mathrm{C}(8\,;1)$, $\mathrm{D}(14\,;1)$ et $\mathrm{E}(14\,;-1)$. Les points H et K sont les points d'intersection d'abscisses positives respectivement du cercle Γ et de l'ellipse ε avec l'axe (OI).

Partie A : étude des différentes parties composant la montre-bracelet

1. La partie montre

L'ellipse ε et le cercle Γ ont pour centre O.

a. Dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, une équation cartésienne de l'ellipse ε est $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Donner la longueur de chacun des axes de l'ellipse.

b. Justifier que le point B est un point de l'ellipse ε.

c. Le cercle Γ passe par le point A. Donner une équation cartésienne du cercle Γ.

d. L'ellipse ε a été obtenue à partir du cercle Γ par affinité orthogonale d'axe (OJ).
Donner le rapport $\dfrac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}}$ de cette affinité orthogonale.

2. La partie bracelet

La partie reliant les points B et C est un arc de la parabole $\mathscr{P}$ qui représente la fonction f définie par $f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}8x + 4{,}2$.

a. Vérifier que les points B et C sont bien des points de la parabole $\mathscr{P}$.

b. La tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point C est-elle parallèle à l'axe (OI) ? Justifier.
Que peut-on dire du raccordement au point C entre l'arc de la parabole $\mathscr{P}$ et le segment $[\mathrm{CD}]$?

c. On admet que la tangente à l'ellipse ε au point B a pour équation $y = -0{,}8x + 5$.
Que peut-on dire du raccordement entre l'arc de parabole et l'ellipse ε au point B ? Justifier.

d. Donner une représentation paramétrique du demi-cercle de diamètre $[\mathrm{DE}]$.

Partie B : nouveau modèle de montre-bracelet

Afin de réduire la partie métallique et de lisser l'objet, le styliste souhaite ne conserver que le cercle Γ en métal. Pour le bracelet, il veut relier les points A et C par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction g définie, sur l'intervalle $[0\,;8]$, par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.

1. Donner l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

2. On souhaite que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A et C soient parallèles à l'axe (OI).

a. Donner $g(0)$, $g'(0)$, $g(8)$ et $g'(8)$.

b. En déduire un système d'équations vérifié par a, b, c et d.

c. Résoudre ce système.

3. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\ 8]$, $g(x) = \frac{1}{128}x^3 - \frac{3}{32}x^2 + 3$.

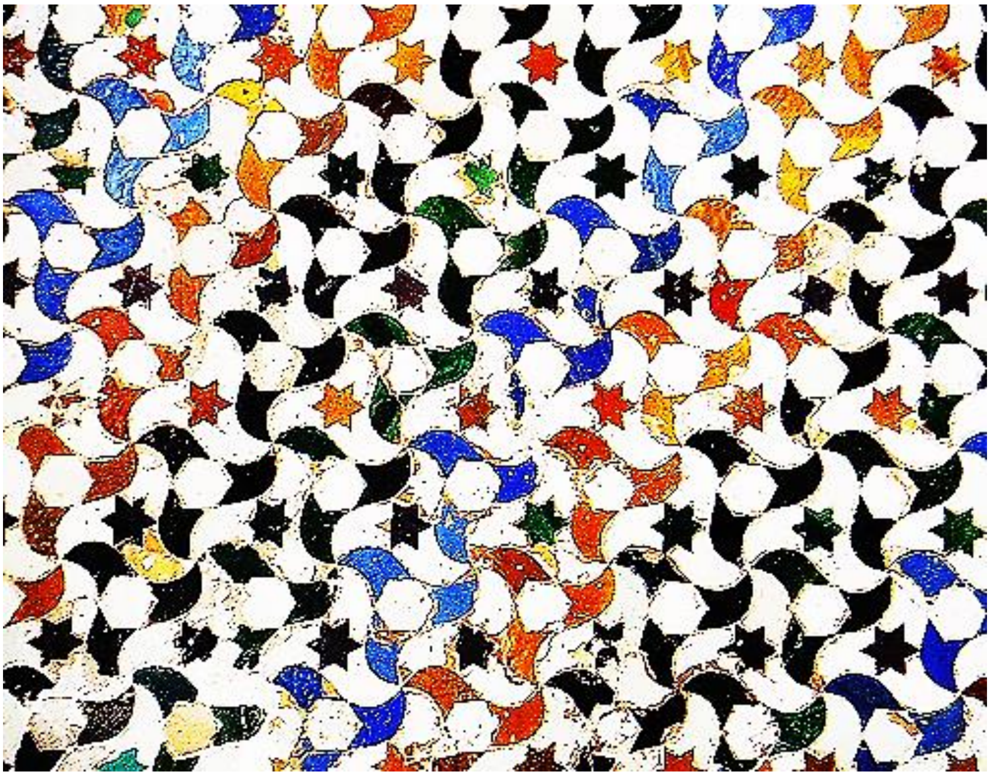
a. Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe 2 à rendre avec la copie**.
On arrondira les résultats au dixième.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en **annexe 2 à rendre avec la copie**.

Compléter la figure pour obtenir le nouveau modèle de montre-bracelet.

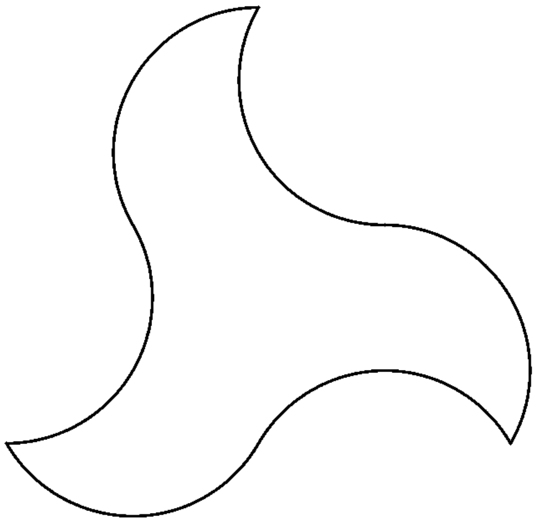
EXERCICE 2 (7 points)

Le palais de l'Alhambra à Grenade est réputé pour ses ornements muraux représentants différents pavages du plan. L'un des plus célèbres est représenté ci-dessous. Il est constitué de motifs *pajarita*.



Partie A : construction d'un motif *pajarita* à partir d'un triangle équilatéral

On veut compléter la figure constituée d'un triangle équilatéral ABC de **l'annexe 3 à rendre avec la copie** afin de construire le motif *pajarita* représenté ci-contre.



1. Placer les points A', B' et C' milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

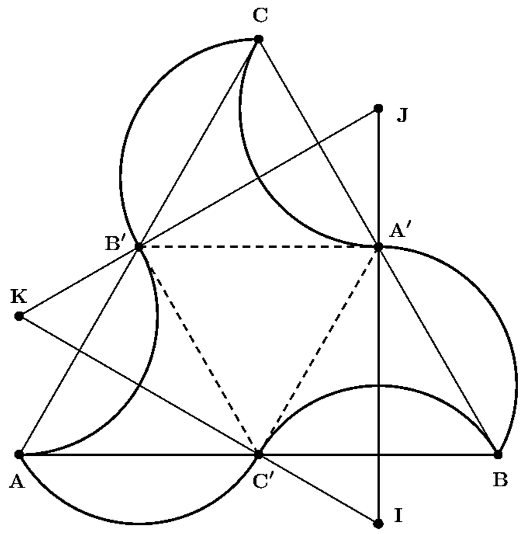
2. Construire les droites Δ, Δ' et Δ'' médiatrices respectives des segments $[AB']$, $[BC']$ et $[CA']$. On note :

- I le point d'intersection de Δ et Δ'
- J le point d'intersection de Δ'et Δ''
- K le point d'intersection de Δ''et Δ.

3. Construire les arcs de cercle, internes au triangle ABC, de centres respectifs I, J et K et reliant respectivement les points B et C', C et A' et A et B' puis leurs symétriques respectifs par rapport aux points C', A' et B' pour obtenir le motif *pajarita*.

Partie B : quelques propriétés géométriques

On considère le motif *pajarita* obtenu à partir du triangle équilatéral ABC, construit dans la **partie A** et représenté ci-contre. Les sommets de ce motif *parajita* sont les points A, B et C.
Les points I, J et K construits dans la question **2.** de la **partie A** sont les centres respectifs des arcs de cercle reliant les points B et C', C et A' et A et B'.



1. **Tangente commune**

   a. Sur quel segment de la figure ci-contre se trouve le centre de l'arc de cercle reliant les points B' et C ? Justifier.

   b. Prouver que les arcs de cercle reliant les points A et B' et B' et C ont la même tangente au point B'. Justifier.

2. **Tangente au sommet**

   a. Justifier que les droites $(A'B')$ et (IJ) sont perpendiculaires.

   b. En déduire que l'angle $\widehat{B'CJ}$ est droit.

   c. Quelle est la tangente en C à l'arc reliant les points A' et C ? Justifier.

Partie C : pavage du plan

1. Par quelles transformations peut-on obtenir le pavage de **l'annexe 3 à rendre avec la copie** à partir du motif *pajarita* ?
   Pour définir ces transformations, placer les points nécessaires sur la figure de **l'annexe 3 à rendre avec la copie**.

2. Un carreleur souhaite recouvrir un mur de motifs *pajarita*. Pour des questions pratiques, il veut utiliser des carreaux de forme hexagonale.

   a. Sur **l'annexe 3 à rendre avec la copie**, dessiner soigneusement un exemple d'hexagone régulier, le plus petit possible, dont les sommets soient des sommets de motifs *pajarita* et qui permette de paver le plan.

   b. Par quelles transformations peut-on obtenir le pavage de **l'annexe 3 à rendre avec la copie** en utilisant ce motif hexagonal ?

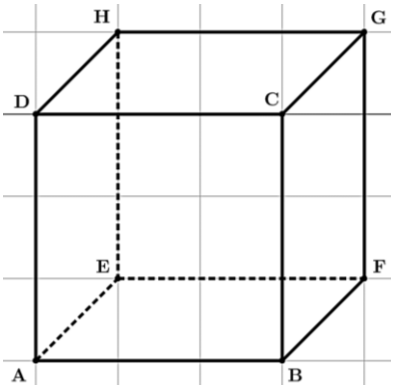
EXERCICE 3 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chacune des cinq questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. On note $\log$ la fonction logarithme décimal. Le nombre réel $\log(10^5 \times 2{,}2)$ est égal à :

- $7{,}2$
- $5 \times \log(2{,}2)$
- $5 + \log(2{,}2)$
- $5{,}34$

2. On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ d'arête 3 représenté ci-contre.



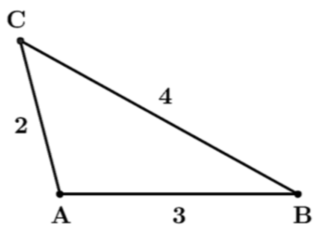
Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EH}}$ est égal à :

- 9
- $3\sqrt{3}$
- -9
- $-3\sqrt{3}$

3. La solution de l'équation $8 + 2x^3 = 20$ est :

- $1{,}817$
- 6^{-3}
- 2
- $6^{\frac{1}{3}}$

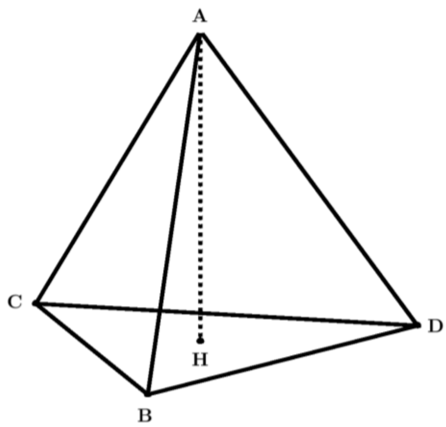
4. On considère le triangle ABC ci-contre.



Le cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est égal à :

- 9
- $\frac{7}{8}$
- $-\frac{1}{4}$
- $\frac{11}{16}$

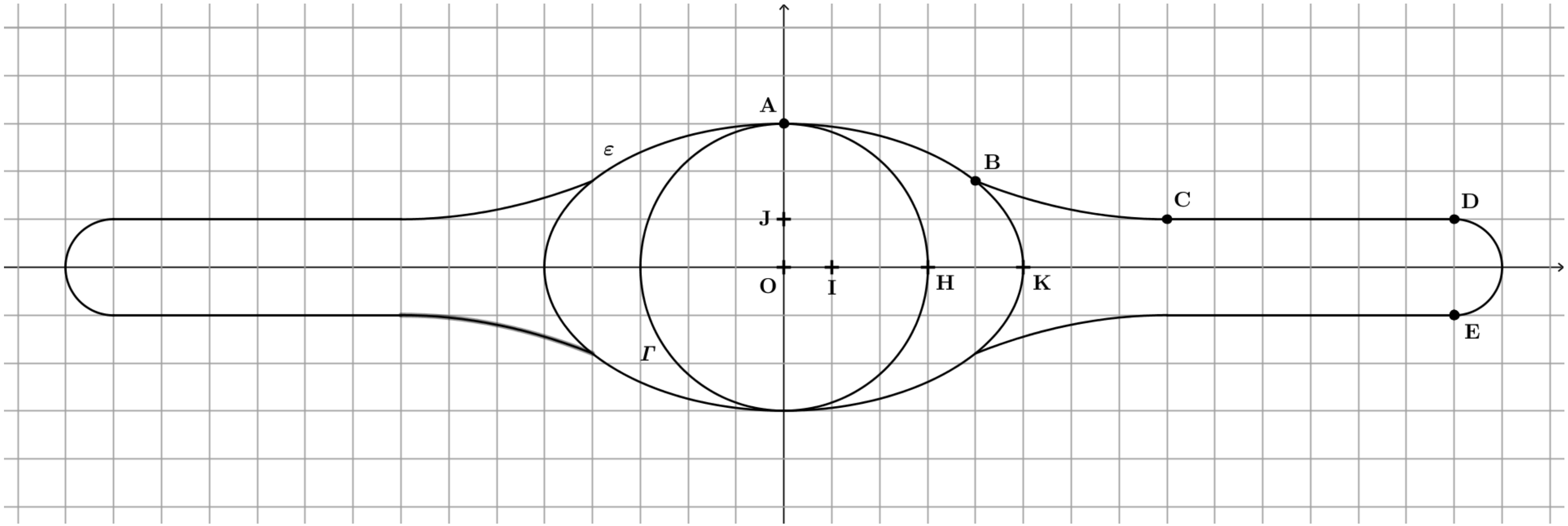
5. Toutes les faces du tétraèdre régulier ABCD représenté ci-contre sont des triangles équilatéraux. H est le centre de gravité de la face BCD.



Le tétraèdre ABCD est invariant par la rotation d'axe (AH) et d'angle :

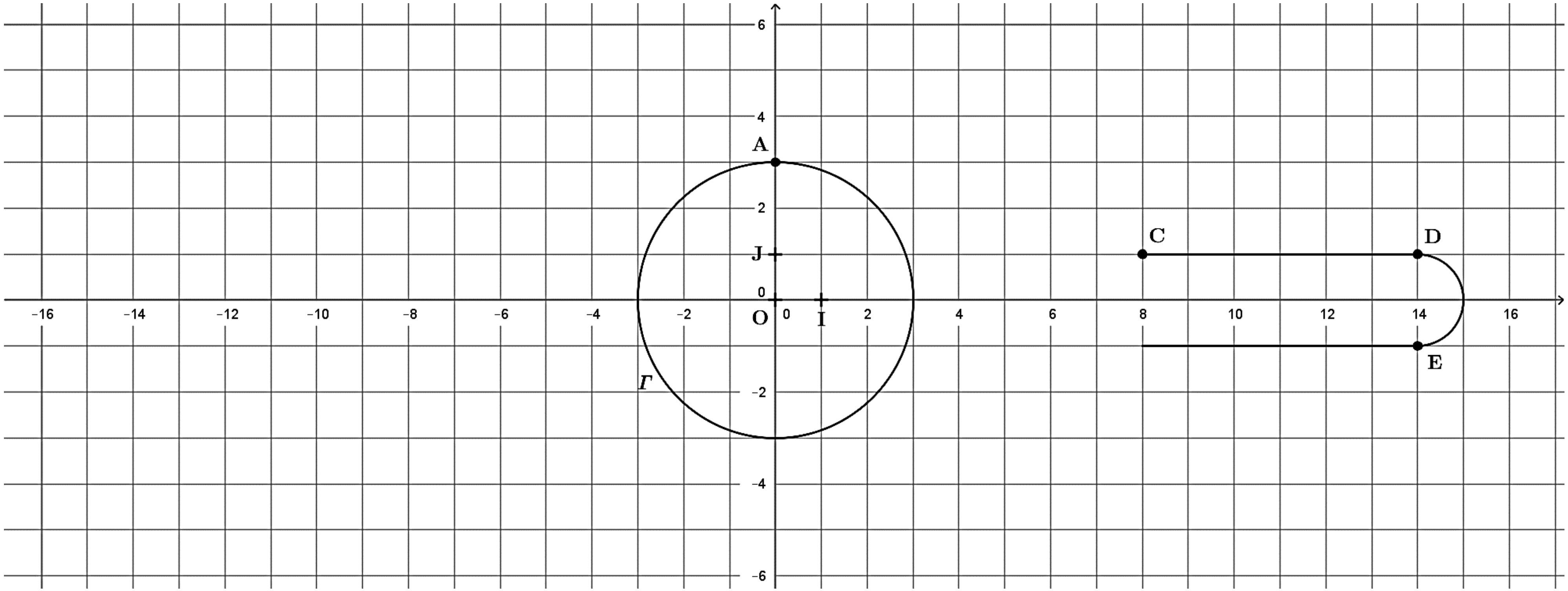
- $90°$
- $120°$
- $60°$
- $180°$

Annexe 1



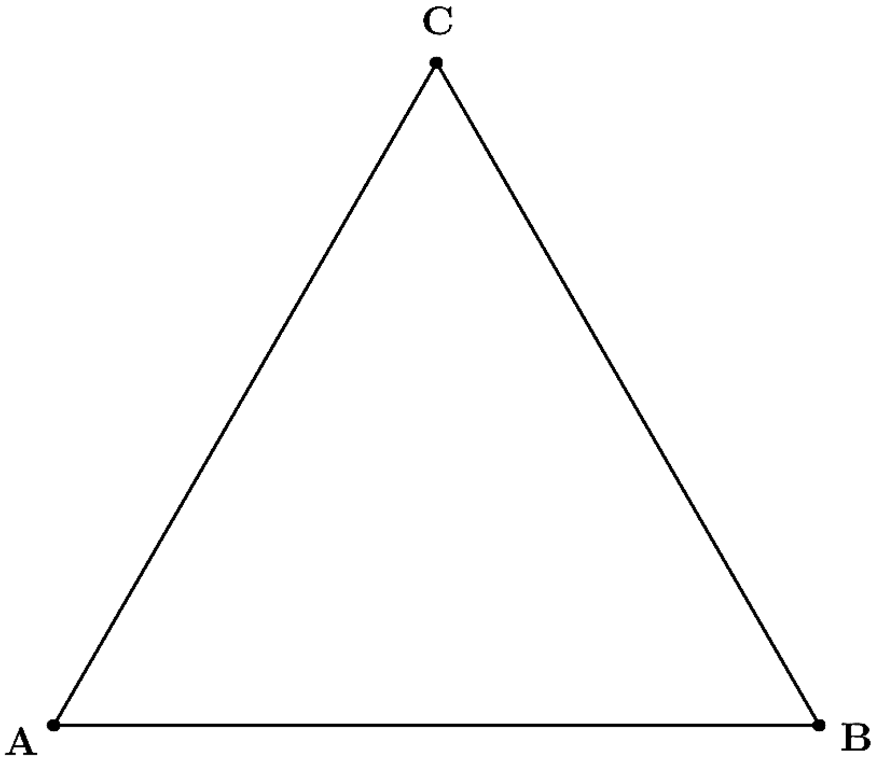
Annexe 2 à rendre avec la copie

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$									



Annexe 3 à rendre avec la copie

EXERCICE 2 – Partie A



EXERCICE 2 – Partie C