BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4(L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

• *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*
• *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
• *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
• *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}42$. On peut affirmer que :

   a. $P_A(B) = 0{,}3$.

   b. $P(A \cup B) = 0{,}58$.

   c. $P_B(A) = 0{,}84$.

   d. $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$.

2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

   a. L'espérance de cette loi X est $\dfrac{2}{5}$.

   b. $p(X > 2) = \dfrac{3}{5}$.

   c. $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$.

   d. $p(X \leqslant 5) = 0$.

3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

   a. $p(Y \leqslant 100) = 0{,}45$.

   b. $p(Y > 98) = 0{,}75$.

   c. $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0{,}95$.

   d. $p(Y \leqslant 110) \approx 0{,}85$.

4. Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

   a. 30.

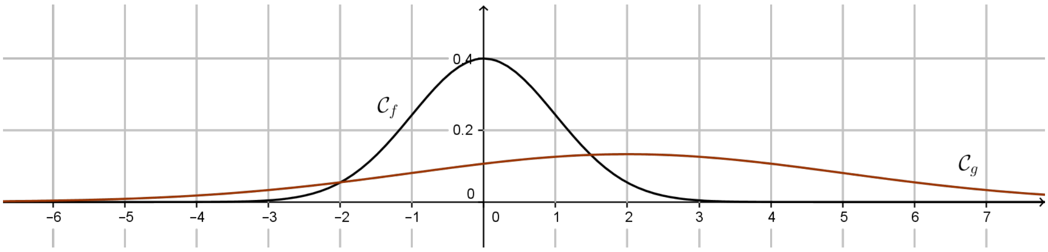
   b. 64.

   c. 100.

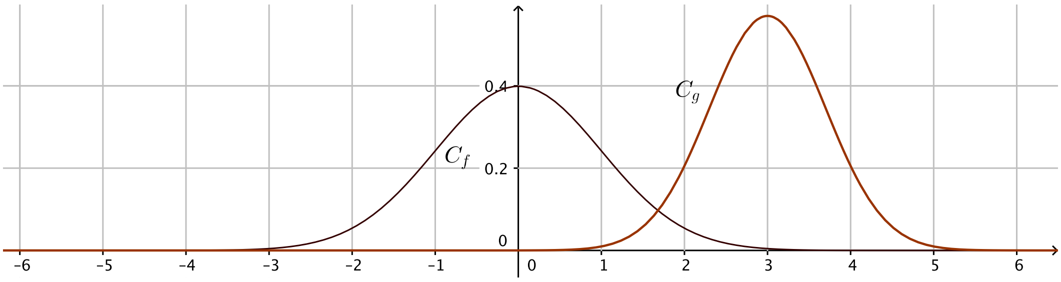
   d. 400.

5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$.
La représentation graphique de ces deux fonctions est :

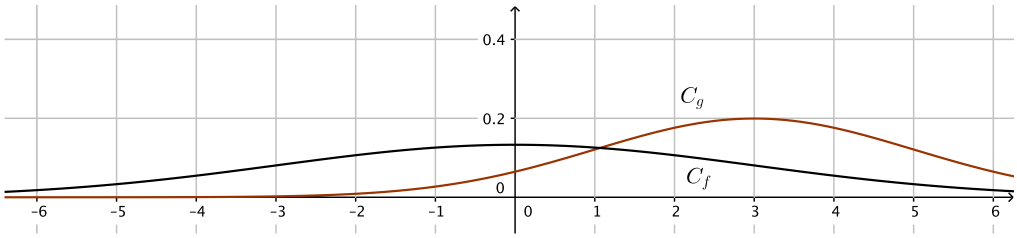
a.



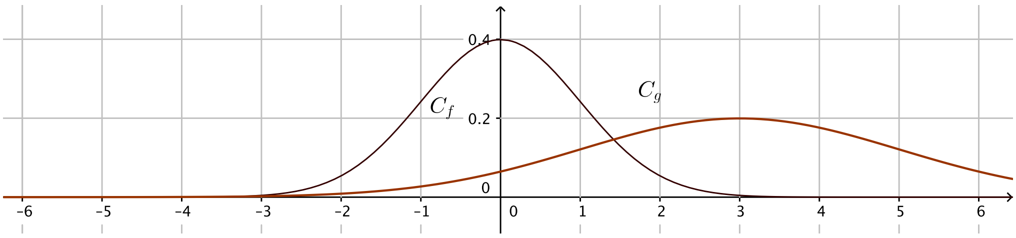
b.



c.



d.



EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de 2 m^3 d'eau par jour.

Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage. Ainsi, $u_0 = 75$.

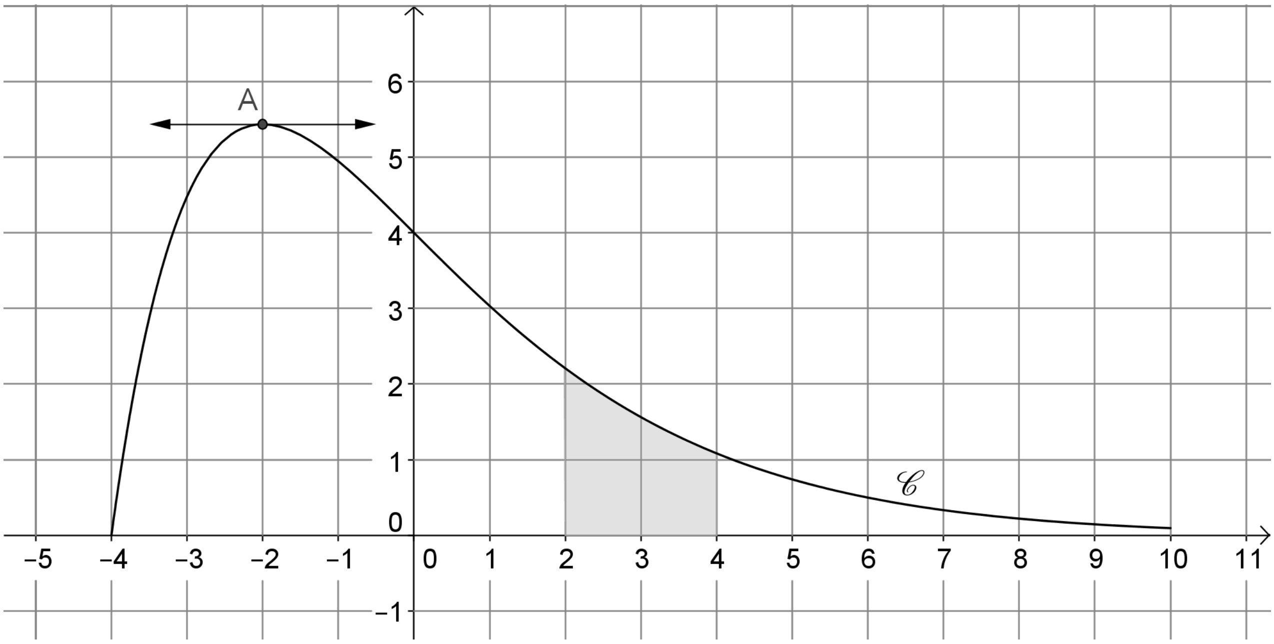
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   Est-elle géométrique ?
3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 2$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.
   - **b.** Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$.
   - **d.** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65 m^3, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que u	L5
	u prend la valeur	L6
	n prend la valeur n+1	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

   - **a.** Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.
   - **b.** Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?
   - **c.** Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

EXERCICE 3 (7 points) Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



Partie A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$ par $f(x) = (x+4)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. **a.** Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$.
   c. Montrer que sur l'intervalle $[\,1\,;\,6\,]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.
   On notera α cette unique solution.
   d. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\mathrm{e}^{-0,5x}$.
   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

3. a. On considère la fonction F définie par $F(x) = (-2x-12)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

b. Calculer

$$S = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

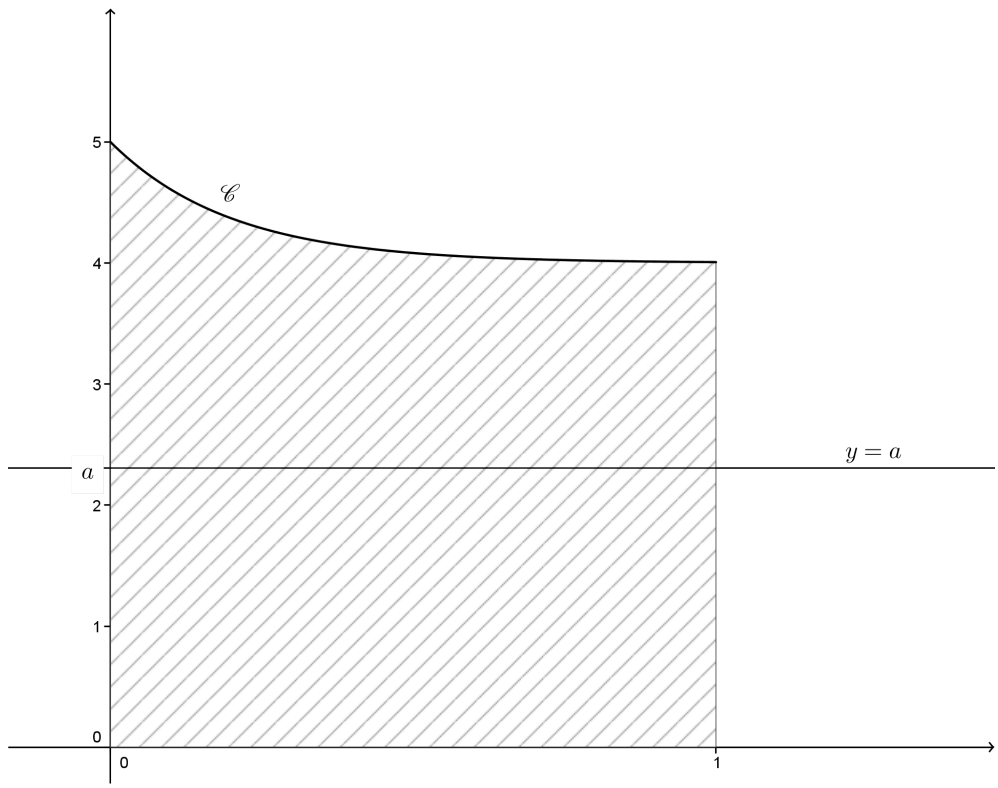
EXERCICE 4 (3 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$.

On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.

2. Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.