

Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire.

NOR : MENE1809042N

Note de service n° 2018-051 du

MEN — DGESCO A1

Texte adressé aux rectrices et recteurs d'académie ; aux directrices et directeurs académiques des services de l'éducation nationale ; aux inspectrices et inspecteurs d'académie-inspectrices et inspecteurs pédagogiques régionaux ; aux inspectrices et inspecteurs de l'éducation nationale du premier degré ; aux chefs d'établissements publics et privés sous contrat ; aux professeurs des écoles et des collèges publics et privés sous contrat.

Dans le rapport remis au ministre de l'éducation nationale le 12 février 2018, le mathématicien Cédric Villani et l'inspecteur général Charles Torossian ont souligné la nécessité de rééquilibrer et de clarifier l'enseignement des mathématiques, de lui donner une meilleure cohérence pour en augmenter l'efficacité.

Dans le cadre de cet enseignement, comme l'académie des sciences en 2007 puis le conseil national d'évaluation du système scolaire (CNESCO) en 2015, le rapport accorde une place centrale au calcul. L'acquisition du sens des quatre opérations dès la classe de cours préparatoire, l'enseignement effectif des grandeurs et mesures pour soutenir le sens des nombres et des opérations, le développement des automatismes de calcul par des pratiques ritualisées qui en favorisent la mémorisation, libèrent l'esprit des élèves et facilitent la résolution de problèmes, sont recommandées dès les premières années de l'école primaire (mesures 11 et 12).

Les auteurs du rapport précisent toutefois : « Il ne s'agit évidemment pas de se précipiter à poser les opérations, sans compréhension ou contexte, mais plutôt d'explorer des situations qui donnent du sens aux actions liées aux quatre opérations, de les mettre en action, puis d'évoluer progressivement vers les écritures mathématiques. [...] Cette mise en place est fondamentale et il faut prendre le temps nécessaire pour installer les quatre opérations en alternant le travail sur le sens (comprendre pourquoi on le fait, le mettre en actes puis en mots) et celui sur l'acquisition nécessaire des automatismes. »

L'objet de la présente circulaire est de préciser les orientations pédagogiques qui s'inscrivent dans la lignée des recommandations concernant l'enseignement du calcul. Il s'agit d'en clarifier les différentes composantes pour aider les professeurs des écoles à construire un enseignement rigoureux et progressif visant l'acquisition par tous les élèves du sens des opérations ainsi que de connaissances de faits numériques incontournables et de procédures de calcul efficaces. Ce travail commencé à l'école se poursuivra au collège.

Qu'entend-t-on par : enseigner « les quatre opérations » ?

Les quatre opérations mathématiques enseignées à l'école élémentaire sont l'addition (symbole « + »), la soustraction (« - »), la multiplication (« x ») et la division (« : » ou « ÷ »).

Il convient de ne pas confondre :

- l'opération mathématique : par exemple, pour l'addition : j'ajoute 14 et 35, j'obtiens 49. Sur des tout petits nombres et sans aucun formalisme, l'addition est abordée dès la moyenne section de maternelle (*j'ai 4 œufs j'en ajoute 2, maintenant j'en ai 6*).
- la symbolisation : $14 + 35 = 49$, qui relève du cours préparatoire
- l'algorithme opératoire

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 35 \\ \hline 49 \end{array}, \text{ qui relève aussi du cours préparatoire.}$$

L'apprentissage des quatre opérations à l'école primaire repose d'abord sur la compréhension du sens de ces opérations. L'apprentissage de l'usage du symbole mathématique associé et a fortiori celui d'un algorithme opératoire peuvent arriver dans un deuxième ou un troisième temps.

A l'école maternelle

Très tôt, l'enfant manifeste des compétences relatives aux quantités et à leur expression par des nombres¹. L'apprentissage de la comptine numérique et la mise en place de la capacité à dénombrer sont complémentaires et doivent faire l'objet d'un travail quotidien. **L'acquisition de la suite orale des nombres commence dès la petite section de la maternelle** et se poursuit en moyenne et grande sections.

Toutes les occasions d'usage de cette suite doivent être saisies (ou provoquées) afin d'en faciliter la mémorisation, la récitation collective comme les récitations individuelles doivent être encouragées. Ainsi, par exemple, la mémorisation de comptines (« un, deux, trois, de bois ; quatre, cinq, six, ... ») peut contribuer à celle de la suite des nombres, qui doit être connue jusqu'à 30 en fin de grande section. D'autres activités, comme le repérage de la date sur un calendrier, permettent de se familiariser avec cette suite de nombres et son écriture en chiffres. Toutefois, à ce stade, la suite des nombres est une liste ordonnée dont la construction n'est pas encore accessible et qui, par exemple, pourrait être comparée à l'alphabet : le principe fondamental de la numération décimale de position n'apparaît pas encore et rien n'indique à l'élève de grande section que le nombre qui se lit « douze » s'écrit 12 car il est égal à $1 \times 10 + 2 \times 1$.

Les enfants apprennent généralement à réciter la séquence numérique (« un, deux, trois... ») avant même de comprendre le sens de ces mots, et avant de comprendre que la routine du comptage peut être utilisée pour établir la cardinalité d'un ensemble. Aussi le lien doit-il être fait, notamment pour les petits nombres, entre la désignation des éléments (« un, deux, trois, quatre... dix ») et le cardinal (« dix élèves sont sortis de la classe »).

Des activités qui ont spécifiquement pour but la construction de l'aspect cardinal des nombres sont proposées. Des jeux (par groupes de deux ou trois), ou la résolution de petits problèmes dont l'énoncé est oralisé par le maître en s'appuyant sur un support toujours concret et tangible : aller chercher une quantité donnée d'objets, aller chercher le nombre nécessaire d'objets pour compléter une boîte dont le nombre de cases est donné ou connu (*J'en veux 6 et pour l'instant j'en ai 2, il m'en manque donc 4*), déterminer le résultat d'un ajout fait derrière un écran noir (*J'en avais 4, j'en rajoute 2, combien en ai-je maintenant ?*), etc. A travers ces jeux ou problèmes qui amènent des décompositions et recompositions, les élèves se familiarisent avec la suite des nombres obtenue par ajouts successifs d'une unité et avec l'addition, mais aussi, sur des très petits nombres, avec la soustraction (*problèmes de retraits ou questions du type : combien faut-il enlever pour obtenir ...*), la multiplication (*une table de 4 enfants ; aller chercher assez de cubes pour que chaque enfant en ait 2*) et la division (*partage équitable ; 8 bonbons à distribuer à 4 enfants pour que chacun en ait le même nombre*).

Parallèlement à la découverte des nombres écrits dans les activités ordinaires de la vie de la classe ou dans les jeux, l'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres.

À l'école élémentaire

Mémorisation de faits numériques, calcul mental, calcul en ligne, calcul posé : toutes les formes de calcul mobilisent à la fois :

- **la connaissance de résultats mémorisés** tels les compléments à 10, les résultats des tables d'addition et de multiplication, les doubles et les moitiés, quelques décompositions remarquables

¹ Cours de S. Dehaene, les fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire
https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjijs72JiPvZAhUN6aQKH7hD3IQFgg2MAI&url=https%3A%2F%2Fwww.college-de-france.fr%2Fmedia%2Fstanislas-dehaene%2FUPL22033_dehaene_res0708.pdf&usq=AOvVaw11-V3EmWoE7vX3jQfWi2L0

($100 = 25 \times 4$ par exemple), une parfaite compréhension des règles de la numération² et des manipulations simples qu'elle permet (305 c'est $300+5$, aussi $205+100$; etc.) ;

- **le sens des opérations** : mentalement, en ligne ou en colonne, ajouter deux nombres à trois chiffres ne peut être réussi si par ailleurs on ne sait pas ce que signifie le verbe « ajouter » et il en est de même pour les autres opérations ;
- **des connaissances plus ou moins spécifiques du mode de calcul choisi** : pour du calcul mental ou en ligne, les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication, la distributivité de la multiplication sur l'addition, sont indispensables ; pour du calcul posé, un algorithme propre à chaque opération doit être parfaitement maîtrisé.

La mémorisation de faits numériques

La mémorisation de résultats est un processus lent qui s'étale sur plusieurs années. Des réactivations seront nécessaires au collège, pour consolider et éviter l'oubli, mais à la fin de l'école primaire les tables et les principaux résultats indiqués ci-dessus doivent déjà être parfaitement disponibles. Pour cela, **une programmation structurée, alliant rythme assez soutenu et réactivations très fréquentes est nécessaire.**

L'apprentissage des tables, notamment, doit débiter dès le cours préparatoire avec les tables d'addition, en commençant à mémoriser très tôt, dans les deux sens, les sommes de deux nombres égales à 10 ou moins de 10 ($7 + 3 = ?$ ou $6 + ? = 9$) et les tables des doubles de nombres inférieurs à 10, et se poursuivre au CE1 et au CE2 avec les tables de multiplication. Au cycle 3, des entraînements spécifiques mais surtout la mobilisation fréquente des résultats lors des activités de calcul mental, calcul en ligne et calcul posé, doivent en assurer la stabilisation.

L'apprentissage des faits numériques ne peut être simplement renvoyé aux familles dans le cadre des « leçons » ; **il doit faire l'objet d'un travail en classe.** Chaque résultat est d'abord exploré et construit en classe, récité et réinvesti, noté dans le cahier de référence en mathématiques. Dans un deuxième temps seulement un travail à la maison peut être demandé.

Par exemple, le résultat du produit 6×8 étant à apprendre, le maître demande d'abord à tous les élèves de chercher plusieurs façons de calculer 6×8 ($6 \times 4 + 6 \times 4 = 24 + 24 = 48$; $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 12, 18, 24, \dots, 48$; $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 16 + 16 + 16 = 32 + 16 = 48$; $6 \times 8 = 5 \times 8 + 1 \times 8$; etc.), puis note au tableau toutes les procédures trouvées par les élèves, puis fait noter dans le cahier de référence le résultat et quelques procédures significatives, puis propose quelques calculs en ligne ou posés comme 616×8 ou 816×66 , enfin demande aux élèves d'apprendre la table de 8 jusqu'à 6×8 sachant que les résultats 2×8 , 3×8 , 4×8 et 5×8 ont déjà été travaillés.

Le calcul mental

Que ce soit sous forme d'activité décrochée de la séance de mathématiques ou bien intégrée à celle-ci, oralement, sur l'ardoise, sur feuille ou sur le cahier de brouillon, avec un support oral (le maître dicte) ou écrit (tableau noir, TBI, tablettes, ordinateurs, fiches, ...), le calcul mental **doit faire l'objet d'une pratique quotidienne moyenne d'au moins 15 minutes.** On privilégiera l'**alternance** de séries de **séances d'entraînement courtes** (10 à 15 minutes) avec des **séances longues** (30 à 45 minutes) **visant des apprentissages procéduraux spécifiques.**

La construction des faits numériques relève dans un premier temps du calcul mental, mais la pratique du calcul mental s'appuie aussi sur **une bonne compréhension et une bonne connaissance de propriétés des nombres et des opérations** qui doivent être enseignées et formalisées. Les noms savants des propriétés des opérations (commutativité, distributivité, etc.) ne relèvent pas de l'école élémentaire. Les propriétés peuvent être énoncées à partir d'exemples prototypiques ou à l'aide de phrases utilisant un vocabulaire simple. Ainsi, on ne parlera pas de la commutativité de l'addition mais, après plusieurs observations de cette propriété, on énoncera qu'« *On ne change pas le résultat d'une addition si on change l'ordre des nombres* » et on donnera quelques exemples. Ensuite, la phrase notée sur le cahier de référence sera à nouveau énoncée à l'identique chaque fois que la propriété sera utilisée.

D'autres connaissances procédurales, comme par exemple « *pour multiplier par 5, je peux multiplier par 10 et diviser par 2* » relèvent du calcul mental et doivent aussi être enseignées et exercées.

² La représentation chiffrée d'un nombre correspond à son développement décimal : le nombre douze se code « 12 » car 12 est égal à $1 \times 10^1 + 2 \times 10^0$, c'est-à-dire à $1 \times 10 + 2 \times 1$; et le nombre qui se code « 305 » est égal à $3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$, c'est-à-dire $3 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1$.

Dès la fin du cycle 2 toutes les tables de multiplication doivent être sollicitées, ainsi que la commutativité et la distributivité de la multiplication sur l'addition et sur la soustraction, mais sur des petits nombres. Au cycle 3, les mêmes connaissances pourront s'appliquer à des nombres entiers un peu plus grands, et à des nombres décimaux.

Le calcul en ligne

Le calcul en ligne repose sur les mêmes principes que le calcul mental, mais le support de l'écrit permet d'alléger la mémoire de travail en notant des résultats intermédiaires et d'aborder ainsi des calculs sur des nombres un peu plus grands ou sur des nombres plus nombreux. Par exemple, ajouter trois nombres au lieu de deux ; ou multiplier un nombre décimal par un nombre entier au lieu de multiplier deux nombres entiers. Le calcul en ligne permet ainsi de soumettre aux élèves des calculs qui pourront être traités mentalement plus tard. Par exemple, le produit 6×48 peut être proposé dès la fin du cycle 2 comme calcul en ligne et au cours du cycle 3 comme calcul mental.

De nombreux compléments sur ces deux modes de calcul, mental et en ligne, sont disponibles sur EDUSCOL³.

Le calcul posé

Le calcul posé repose sur la connaissance de faits numériques (tables) et sur celle d'algorithmes qui ne sont véritablement opératoires que s'ils sont parfaitement maîtrisés.

Ainsi les quatre algorithmes opératoires (pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division) doivent faire l'objet d'un enseignement précis, guidé et normalisé. Au début de l'apprentissage, le rythme doit être suffisamment soutenu afin que l'automatisme – et donc le confort et la sûreté pour l'élève – puissent s'installer. Ensuite, à partir du CE1, la plupart des séances de mathématiques donnent l'occasion aux élèves de poser une ou plusieurs opérations.

Pour autant, une fois les principes de fonctionnement d'un algorithme d'une opération posée acquis par les élèves, le cadre privilégié pour l'entraînement à la mise en œuvre de cet algorithme est celui de la résolution de problèmes. Il faut ainsi éviter la pratique répétée d'exercices techniques sur des temps excessivement longs. Dans le même esprit, on évitera les exercices de calcul d'opérations posées trop longues comme par exemple la multiplication de nombres supérieurs à 1000 ou la division par des grands nombres.

Pour la soustraction, le choix de l'algorithme (compensation ou cassage de l'unité de numération supérieure) relève de l'équipe d'école. On aura intérêt à conserver le même durant les quatre années concernées (du CE1 au CM2).

Pour la division, des étapes peuvent être envisagées, le nombre de calculs écrits (multiplications, soustractions, etc.) se réduisant progressivement.

La justification mathématique de la pertinence des algorithmes opératoires est d'une difficulté inégale selon l'opération :

- pour l'addition, la compréhension de l'algorithme relève stricto sensu de la compréhension de la numération décimale et à l'aide de matériel de numération (plaques, barres, cubes) puis par l'oralisation, le maître doit expliquer et justifier l'algorithme ;
- pour la soustraction, si c'est le choix du cassage de l'unité de numération supérieure qui est fait, comme pour l'addition le maître doit justifier l'algorithme par l'utilisation de matériel puis l'oralisation ; en revanche, si c'est le choix de la compensation qui est fait, une justification peut être donnée, basée sur des écritures en ligne ($75-29 = (75+10) - (29+10)$), c'est pour cela que l'on dit « 9 ôtés de 5 je ne peux pas, donc je fais 9 ôtés de 15 (ce qui revient à ajouter **une dizaine** à 75), je pose 6 et je retiens 1 ; 2 et 1 de retenue (ce qui revient à ajouter **une dizaine** à 29) qui font 3, 3 ôtés de 7 font 4 ») sans qu'il soit demandé à tous les élèves de mémoriser cette explication ;
- pour la division, une explication orale appuyée sur une écriture en ligne est possible pour une situation où les nombres sont petits et bien choisis (par exemple $642 : 3$), la généralisation étant admise.

³http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/87/9/RA16_C2_MATHS_calcul_en_ligne_587879.pdf

Calcul mental, calcul en ligne ou calcul posé ?

Il n'y a pas lieu d'opposer les différents modes de calcul. Chacun doit faire l'objet d'un entraînement spécifique. L'élève, lorsqu'il doit produire un résultat, par exemple pour une résolution de problèmes, doit pouvoir choisir le mode de calcul qui lui paraît, à lui, dans cette situation, avec ses connaissances, le plus sûr et/ou le plus rapide et/ou le plus facile.

Conclusion

La place du calcul dans l'enseignement des mathématiques est aujourd'hui reconnue unanimement et la nécessité d'acquérir des automatismes ne fait plus débat. Si la résolution de problèmes est bien au centre de l'activité mathématique, la familiarité avec les nombres et leurs propriétés, ainsi qu'une maîtrise minimale du calcul sont indispensables aux élèves pour qu'ils puissent appréhender le problème et appliquer leur intelligence à la recherche et à la poursuite des voies de résolution qui s'offrent à eux. Par ailleurs, la majorité des élèves aiment manipuler les nombres, calculer, c'est pour eux une forme de jeu. Enseigner explicitement et intensivement le calcul aux élèves revient en fait à leur offrir à la fois des outils pour la résolution de problèmes et la suite de leurs études et le plaisir de jouer avec les nombres.

Le ministre de l'éducation nationale

Jean-Michel BLANQUER