BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

2. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) \in [0;1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note l la limite de la suite (u_n).
En admettant que l est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que $l = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n=0
    u=0
    while u<1-h:
        n=n+1
        u=(u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur $5\,000$.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5.

- **a.** Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.
- **b.** Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Exercice 2 **5 points**

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice.
On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} près.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball. Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A

Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de 49,2 % lors d'une saison.
Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc.
Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.
3. Calculer $P(X = 5)$.
4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

Partie B

On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où p est un réel tel que $0 \leq p \leq 1$.

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs.
On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p.

3. Donner la loi de probabilité de Y. Présenter la réponse sous forme de tableau.

4. Montrer que $P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2$.

5. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par
$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$
   a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle $[0; 1]$.
   b. En déduire l'existence d'une unique valeur α dans l'intervalle $[0; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0{,}9$.
   c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur α.
   d. Interpréter la valeur de α dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points

$$A(1\,;2\,;3),\ B(-1\,;3;1),\ C(2\,;1;6)\ \text{ et } D(3\,;-2\,;-1).$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;4\,;\ 1)$ est normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.

b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3. **a.** Montrer que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$.

b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur qui lui est associée.

Exercice 4 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur **R** par

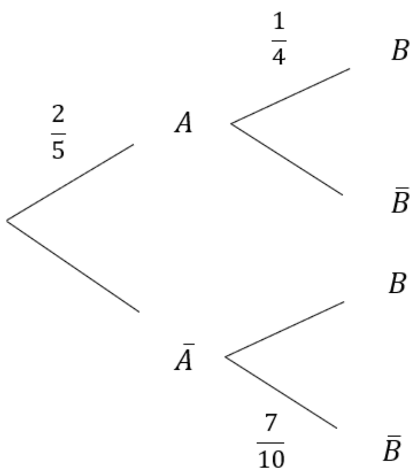
$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5$$

Affirmation 1 : La fonction f est convexe sur **R.**

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher. On tire simultanément 5 jetons de cette urne. On appelle tirage la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.

Affirmation 2 : Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103 096.

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



Affirmation 3 : $P_B(\bar{A}) = \dfrac{9}{50}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x),$$

où y est une fonction de la variable x, dérivable sur **R**.

Affirmation 4 : La fonction h définie sur **R** par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ est solution de (E) sur **R**.

Affirmation 5 : Les solutions de (E) sur **R** sont les fonctions k définies sur **R** par

$k(x) = C\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ où C est une constante réelle.